

КОНЕЧНАЯ Наталья Николаевна,

кандидат физико-математических наук, доцент Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова,

e-mail: n.konechnaya@narfu.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Аннотация. В работе исследована асимптотика решений одного класса линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка на бесконечности. При этом предполагается, что коэффициенты исходного уравнения являются производными конечного порядка в смысле теории распределений от некоторых функций, убывающих на бесконечности в интегральном смысле.

Ключевые слова: квазипроизводные, квазидифференциальное выражение, дифференциальные уравнения с коэффициентами-распределениями, асимптотика решений дифференциальных уравнений.

KONECHNAYA Natalia Nikolaevna,

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor Northern (Arctic) Federal University named
after M.V. Lomonosov

ABOUT ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER WITH DISTRIBUTION COEFFICIENTS

Annotation. In this paper, the asymptotic behavior of solutions to one class of fourth-order linear differential equations at infinity is studied. It is assumed that the coefficients of the original equation are derivatives of finite order in the sense of distribution theory from some functions that decrease at infinity in the integral sense.

Key words: quasiderivatives, quasidifferential expression, differential equations with distribution coefficients, asymptotic behavior of solutions of differential equations.

1. Пусть p, q, r – комплекснозначные функции u и квазидифференциальное выражение $\tau(u)$. Доказано утверждение, позволяющее отождествить дифференциальное выражение $l(u)$ с соответствующим квазидифференциальным выражением $\tau(u)$. В параграфе 3 приводятся с доказательством теоремы об асимптотике решений уравнения (1) при $x \rightarrow +\infty$.

измеримые на промежутке $[1, +\infty)$ функции, такие, что функции $p, p^{(-1)}, q^{(2)}, p^{(-1)}, r$ принадлежат пространству $L_{loc}^1[1, +\infty)$ локально интегрируемых по Лебегу на промежутке $[1, +\infty)$ функций. В настоящей работе будет исследована асимптотика решений дифференциальных уравнений вида

$$l(y) := (py'')'' - (q'y')' + r'y = \lambda y \quad (1)$$

при $x \rightarrow +\infty$, где λ – комплексный параметр, производные понимаются в смысле теории распределений.

Структура настоящей работы следующая. В параграфе 2 введена матрица типа Шина-Зеттла, порождающая квазипроизводные заданной

2. Определим квадратную матрицу $F=(f_{ij})$ четвертого порядка, ненулевые элементы которой определяются равенствами $f_{12} = f_{34} = 1, f_{22} = qp^{-1}, f_{23} = p^{-1}, f_{31} = -r, f_{32} = -q^2p^{-1}, f_{33} = -qp^{-1}, f_{42} = r$. Следуя известной процедуре (см., например, [1, с. 313]), введем квазипроизводные $y^{(j)}$ ($j=0,1,2,3$) заданной функции y , полагая $y^{[0]} := y, y^{[1]} := y', y^{[2]} := p(y^{[1]})' - qy^{[1]}, y^{[3]} := (y^{[2]})' + qp^{-1}y^{[2]} + q^2p^{-1}y^{[1]} + ry^{[0]}$.

Определим далее квазидифференциальное выражение по формуле

$$\tau(y) = (y^{[3]})' - r y^{[1]}.$$

Областью определения D квазидифференциального выражения $\tau(y)$ – это множество всех комплекснозначных функций y , для которых квазипроизводные $y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]} \in \llbracket AC \rrbracket_{\text{loc}} [1, +\infty)$. При этом для любой функции $y \in D$ справедливо, что $\tau(y) \in L_{\text{loc}}^1 [1, +\infty)$.

Рассмотрим квазидифференциальное уравнение

$$\tau(y) = \lambda y, \quad (2)$$

где λ – комплексный параметр.

Рассмотрим далее систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$Y' = (F + R)Y, \quad (3)$$

где $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$, матрица $F = (f_{ij})$ определена ранее, а элементы матрицы $R = (r_{ij})$ заданы равенствами $r_{41} = \lambda$ и $r_{ij} = 0$ при всех остальных значениях i и j .

Квазидифференциальное уравнение (2) и система линейных уравнений (3) являются равносильными, а именно, если y является решением уравнения (2), то, взяв в качестве квазипроизводной $y^{[0]}$ функцию y , получим, что соответствующий $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$ является решением системы (3). Верно и обратное утверждение, а именно, если $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$ является решением системы (3), то его первая компонента $y = y^{[0]}$ является решением уравнения (2).

Так как $p, p^{(-1)}, q^2 p^{(-1)}, r \in L_{\text{loc}}^1 [1, +\infty)$, то для системы (3) на промежутке $[1, +\infty)$ справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши. Следовательно, данная теорема справедлива и для уравнения (2).

Утверждение. Для всех функций $y \in D$ выполняется равенство

$$l(y) = \tau(y).$$

Доказательство. Для всех функций $y \in D$ в смысле теории распределений справедливы равенства

$$y^{[2]} = p y'' - q y',$$

$$\begin{aligned} y^{[3]} &= (p y'' - q y')' + q p^{-1} (p y'' - q y') + q^2 p^{-1} y' + r y = \\ &= (p y'')' - q' y' + r y. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tau(y) = (p y'')' - (q' y')' + r' y + r y' - r y' = (p y'')' - (q' y')' + r' y$$

Следовательно, $l(y) = \tau(y)$. Утверждение доказано.

Данное утверждение позволяет рассматривать дифференциальное уравнение (1) с коэффициентами-распределениями как квазидифференциальное уравнение (2).

Отметим, что общий подход к регуляризации дифференциальных уравнений высших порядков с коэффициентами – распределениями как квазидифференциальных уравнений, порожденных матрицами Шина-Зеттла, был предложен в работе [2, с. 790].

3. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $p = (1 + p_1)^{-1}$, где $p_1 \in L_1 [1, +\infty)$, и

$$|r| + |q|(1 + |q|)(1 + |p_1|) \in L_1 [1, +\infty). \quad (4)$$

Тогда при $\lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений y_j ($j=1,2,3,4$) вида

$$y_j^{[s-1]}(x) = e^{z_j x} z_j^{s-1} (1 + o(1)), \quad s = 1, 2, 3, 4, \quad (5)$$

при $x \rightarrow +\infty$, где z_j – различные корни четвертой степени из λ .

Доказательство. В силу доказанного утверждения $l(y) = \tau(y)$. Значит, дифференциальное уравнение (1) равносильно квазидифференциальному уравнению (2), а уравнение (2), в свою очередь, равносильно системе дифференциальных уравнений вида

$$Y' = (A + B)Y, \quad (6)$$

где $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$, элементы числовой матрицы $A = (a_{ij})$ определяются равенствами $a_{41} = \lambda$, $a_{jj+1} = 1$ при $j=1,2,3,4$ и $a_{ij} = 0$ для всех остальных значений i и j . Ненулевые элементы матрицы $B = (b_{ij})$ определяются

равенствами $b_{22} = q(1 + p_1)$, $b_{23} = p_1$, $b_{31} = -r$, $b_{32} = -q^2(1 + p_1)$, $b_{33} = -q(1 + p_1)$, $b_{42} = r$.

Если $\lambda \neq 0$, то матрица A имеет различные собственные числа z_j – различные корни четвертой степени из числа λ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Из условия (4) следует, что матрица $B \in L_1[1, +\infty)$. Применив теперь теорему 1.9.1 из монографии [3, с. 37], получим, что система (6) имеет решения Y_j , $j=1, 2, 3, 4$, вида

$$Y_j = e^{z_j x} p_j (1 + o(1)),$$

где $p_j = (1, z_j, z_j^2, z_j^3)^T$ – собственный вектор A , соответствующий z_j .

Учитывая взаимосвязь между решениями уравнения (2) и решениями системы (6), получим, что справедливы формулы (5). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $p = (1 + p_1)^{-1}$, где $p_1 \in L_1[1, +\infty)$, и

$$x^2|r| + |q|(1 + x|q|)(1 + |p_1|) \in L_1[1, +\infty). \quad (7)$$

Тогда при $\lambda = 0$ уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений y_j ($j=1, 2, 3, 4$) вида

$$y_j^{[s]}(x) = \frac{x^{j-1-s}}{(j-1-s)!} (1 + o(1)), \quad 0 \leq s \leq j-1. \quad (8)$$

$$y_j^{[s]}(x) = x^{j-1-s} o(1), \quad j \leq s \leq 3, \quad (9)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Ранее показано, что уравнение (2) равносильно системе (6). Если $\lambda = 0$, то матрица A имеет четырехкратное собственное значение, равное нулю. Система уравнений $Y' = AY$ имеет четыре линейно независимых решения

$$Y_1 = (1, 0, 0, 0), \quad Y_2 = (x, 1, 0, 0), \quad Y_3 = (x^2, x, 1, 0), \quad Y_4 = (x^3, x^2, x, 1).$$

Обозначим символом Q диагональную матрицу вида $Q = (1, x, x^2, x^3)$. Пусть далее $D = QBQ^{-1}$. Ненулевые элементы матрицы $D = (d_{ij})$ определяются равенствами $d_{22} = q(1 + p_1)$, $d_{23} = x^{-1}p_1$, $d_{31} = -x^2r$, $d_{32} = -xq^2(1 + p_1)$, $d_{33} = -q(1 + p_1)$, $d_{42} = x^2r$.

Из условия (7) следует, что матрица $D \in L_1[1, +\infty)$. Применив теперь теорему 1.10.1 из монографии [3, с. 42], получим, что система

уравнений (6) имеет решения Y_j , $j=1, 2, 3, 4$, представимые в виде

$$\begin{aligned} Y_1 &= (1 + o(1), o(x^{-1}), o(x^{-2}), o(x^{-3}))^T, \\ Y_2 &= (x + o(x), 1 + o(1), o(x^{-1}), o(x^{-2}))^T, \\ Y_3 &= (\frac{x^2}{2} + o(x^2), x + o(x), 1 + o(1), o(x^{-1}))^T, \\ Y_4 &= (\frac{x^3}{3!} + o(x^3), \frac{x^2}{2} + o(x^2), x + o(x), 1 + o(1))^T \end{aligned}$$

Учитывая взаимосвязь между решениями уравнения (2) и решениями системы (6), получим, что справедливы формулы (8) и (9). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть существует $\mu > 0$ такое, что функции p, q, r представимы в виде

$$p = ax^{4+\mu}(1 + p_1)^{-1}, \quad q = x^{2+\mu}(b + q_1), \quad r = x^{1+\mu}(c + r_1),$$

где $a \neq 0, b, c$ – комплексные числа, а функции p_1, q_1, r_1 – комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{(\ln x)^{m-1}}{x} (|p_1| + |r_1| + |q_1|(1 + |p_1|)(1 + |q_1|)) \in L_1[1, +\infty). \quad (10)$$

Здесь m – наибольшее из чисел, равных $F(z, \mu) = a \left(\left(z + \frac{\mu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 \right) \left(\left(z + \frac{\mu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 \right) - b(\mu+3) \left(z + \frac{\mu}{2} \right) - \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 + c(\mu+1)$.

Пусть z_1 – корень $F(z, \mu)$ кратности $l_1 \leq 4$. Тогда уравнение (1) имеет решения y_j ($j=1, 2, \dots, l_1$) вида

$$\begin{aligned} y_j^{[s-1]}(x) &= x^{z_1-s+0.5} (\ln x)^{j-1} (c_s + o(1)), \quad s = 1, 2, \\ y_j^{[s-1]}(x) &= x^{z_1+\mu-s+1.5} (\ln x)^{j-1} (c_{2+s} + o(1)), \quad s = 1, 2, \end{aligned}$$

где c_s – некоторые комплексные числа и $c_1 \neq 0$.

Замечание. Отметим, что в работе [4, с. 219] изучен вопрос об асимптотике на бесконечности решений двучленных дифференциальных уравнений четного порядка с коэффициентами-распределениями вида

$$(-1)^n (p(x) y^{(n)})^{(n)} + q^{(k)}(x) y = \lambda y,$$

где $k \leq n$, а производные понимаются в смысле теории распределений.

В работе [5, с. 25] исследована асимптотика на бесконечности решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с коэффициентами-распределениями вида

$$i^{2n+1}((q(x)y^{(n+1)})^{(n)} + (q(x)y^{(n)})^{(n+1)}) + q^{(k)}(x)y = \lambda y,$$

где $k \leq n$, а производные понимаются в смысле теории распределений.

$$l(y) := (py'')' - (q'y')' + r'y = \lambda y \quad (1)$$

при $x \rightarrow +\infty$, где λ – комплексный параметр, производные понимаются в смысле теории распределений.

Структура настоящей работы следующая. В параграфе 2 введена матрица типа Шина-Зеттла, порождающая квазипроизводные заданной функции y и квазидифференциальное выражение $\tau(y)$. Доказано утверждение, позволяющее отождествить дифференциальное выражение $l(y)$ с соответствующим квазидифференциальным выражением $\tau(y)$. В параграфе 3 приводятся с доказательством теоремы об асимптотике решений уравнения (1) при $x \rightarrow +\infty$.

- Определим квадратную матрицу $F=(f_{ij})$ четвертого порядка, ненулевые элементы которой определяются равенствами $f_{12} = f_{24} = 1$, $f_{22} = qp^{-1}$, $f_{23} = p^{-1}$, $f_{31} = -r$, $f_{32} = -q^2p^{-1}$, $f_{33} = -qp^{-1}$, $f_{42} = r$. Следуя известной процедуре (см., например, [1, с. 313]), введем квазипроизводные $y^{(j)}$ ($j=0,1,2,3$) заданной функции y , полагая $y^{[0]} := y$, $y^{[1]} := y'$, $y^{[2]} := (y^{[1]})' - qy^{[1]}$, $y^{[3]} := (y^{[2]})' + qp^{-1}y^{[2]} + q^2p^{-1}y^{[1]} + ry^{[0]}$.

Определим далее квазидифференциальное выражение по формуле

$$\tau(y) = (y^{[3]})' - ry^{[1]}.$$

Областью определения D квазидифференциального выражения $\tau(y)$ – это множество всех комплекснозначных функций y , для которых квазипроизводные $y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]} \in \llbracket AC \rrbracket_{loc} [1, +\infty)$. При этом для любой функции $y \in D$ справедливо, что $\tau(y) \in L_{loc} [1, +\infty)$.

Рассмотрим квазидифференциальное уравнение

$$\tau(y) = \lambda y, \quad (2)$$

где λ – комплексный параметр.

Рассмотрим далее систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$Y' = (F + R)Y, \quad (3)$$

где $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$, матрица $F=(f_{ij})$ определена ранее, а элементы матрицы $R=(r_{ij})$ заданы равенствами $r_{41}=\lambda$ и $r_{ij}=0$ при всех остальных значениях i и j .

Квазидифференциальное уравнение (2) и система линейных уравнений (3) являются равносильными, а именно, если y является решением уравнения (2), то, взяв в качестве квазипроизводной $y^{[0]}$ функцию y , получим, что соответствующий $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$ является решением системы (3). Верно и обратное утверждение, а именно, если $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$ является решением системы (3), то его первая компонента $y = y^{[0]}$ является решением уравнения (2).

Так как $p, p^{(-1)}, q^2 p^{(-1)}, r \in L_{loc} [1, +\infty)$, то для системы (3) на промежутке $[1, +\infty)$ справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши. Следовательно, данная теорема справедлива и для уравнения (2).

Утверждение. Для всех функций $y \in D$ выполняется равенство

$$l(y) = \tau(y).$$

Доказательство. Для всех функций $y \in D$ в смысле теории распределений справедливы равенства

$$\begin{aligned} y^{[2]} &= py'' - qy', \\ y^{[3]} &= (py'' - qy')' + qp^{-1}(py'' - qy') + q^2p^{-1}y' + ry = \\ &= (py'')' - q'y' + ry. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tau(y) = (py'')' - (q'y')' + r'y + ry' - ry' = (py'')' - (q'y')' + r'y.$$

Следовательно, $l(y) = \tau(y)$. Утверждение доказано.

Данное утверждение позволяет рассматривать дифференциальное уравнение

(1) с коэффициентами-распределениями как квазидифференциальное уравнение (2).

Отметим, что общий подход к регуляризации дифференциальных уравнений высших порядков с коэффициентами – распределениями как квазидифференциальных уравнений, порожденных матрицами Шина-Зеттла, был предложен в работе [2, с. 790].

5. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $p = (1 + p_1)^{-1}$, где $p_1 \in L_1[1, +\infty)$, и

$$|r| + |q|(1 + |q|)(1 + |p_1|) \in L_1[1, +\infty). \quad (4)$$

Тогда при $\lambda \neq 0$ уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений y_j ($j=1,2,3,4$) вида

$$y_j^{[s-1]}(x) = e^{z_j x} z_j^{s-1} (1 + o(1)), \quad s = 1, 2, 3, 4, \quad (5)$$

при $x \rightarrow +\infty$, где z_j – различные корни четвертой степени из λ .

Доказательство. В силу доказанного утверждения $l(y) = \tau(y)$. Значит, дифференциальное уравнение (1) равносильно квазидифференциальному уравнению (2), а уравнение (2), в свою очередь, равносильно системе дифференциальных уравнений вида

$$Y' = (A + B)Y, \quad (6)$$

где $Y = \text{colon}(y^{[0]}, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]})$, элементы числовой матрицы $A = (a_{ij})$ определяются равенствами $a_{41} = \lambda$, $a_{jj+1} = 1$ при $j=1,2,3,4$ и $a_{ij} = 0$ для всех остальных значений i и j . Ненулевые элементы матрицы $B = (b_{ij})$ определяются равенствами $b_{22} = q(1 + p_1)$, $b_{23} = p_1$, $b_{31} = -r$, $b_{32} = -q^2(1 + p_1)$, $b_{33} = -q(1 + p_1)$, $b_{42} = r$.

Если $\lambda \neq 0$, то матрица A имеет различные собственные числа z_j – различные корни четвертой степени из числа λ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Из условия (4) следует, что матрица $B \in L_1[1, +\infty)$. Применив теперь теорему 1.9.1 из монографии [3, с. 37], получим, что система (6) имеет решения Y_j , $j=1,2,3,4$, вида

$$Y_j = e^{z_j x} p_j (1 + o(1)),$$

где $p_j = (1, z_j, z_j^2, z_j^3)^T$ – собственный вектор A , соответствующий z_j .

Учитывая взаимосвязь между решениями уравнения (2) и решениями системы (6), получим, что справедливы формулы (5). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $p = (1 + p_1)^{-1}$, где $p_1 \in L_1[1, +\infty)$, и

$$x^2|r| + |q|(1 + x|q|)(1 + |p_1|) \in L_1[1, +\infty). \quad (7)$$

Тогда при $\lambda = 0$ уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений y_j ($j=1,2,3,4$) вида

$$y_j^{[s]}(x) = \frac{x^{j-1-s}}{(j-1-s)!} (1 + o(1)), \quad 0 \leq s \leq j-1, \quad (8)$$

$$y_j^{[s]}(x) = x^{j-1-s} o(1), \quad j \leq s \leq 3, \quad (9)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Ранее показано, что уравнение (2) равносильно системе (6). Если $\lambda = 0$, то матрица A имеет четырехкратное собственное значение, равное нулю. Система уравнений $Y' = AY$ имеет четыре линейно независимых решения

$$Y_1 = (1, 0, 0, 0), \quad Y_2 = (x, 1, 0, 0), \quad Y_3 = (x^2, x, 1, 0), \quad Y_4 = (x^3, x^2, x, 1).$$

Обозначим символом Q диагональную матрицу вида $Q = (1, x, x^2, x^3)$. Пусть далее $D = QBQ^{-1}$. Ненулевые элементы матрицы $D = (d_{ij})$ определяются равенствами $d_{22} = q(1 + p_1)$, $d_{23} = x^{-1}p_1$, $d_{31} = -x^2r$, $d_{32} = -xq^2(1 + p_1)$, $d_{33} = -q(1 + p_1)$, $d_{42} = x^2r$.

Из условия (7) следует, что матрица $D \in L_1[1, +\infty)$. Применив теперь теорему 1.10.1 из монографии [3, с. 42], получим, что система уравнений (6) имеет решения Y_j , $j=1,2,3,4$, представимые в виде

$$Y_1 = (1 + o(1), o(x^{-1}), o(x^{-2}), o(x^{-3}))^T,$$

$$Y_2 = (x + o(x), 1 + o(1), o(x^{-1}), o(x^{-2}))^T,$$

$$Y_3 = (\frac{x^2}{2} + o(x^2), x + o(x), 1 + o(1), o(x^{-1}))^T,$$

$$Y_4 = (\frac{x^3}{3!} + o(x^3), \frac{x^2}{2} + o(x^2), x + o(x), 1 + o(1))^T$$

Учитывая взаимосвязь между решениями уравнения (2) и решениями системы (6), получим, что справедливы формулы (8) и (9). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть существует $\mu > 0$ такое, что функции p, q, r представимы в виде

$$p = ax^{4+\mu}(1+p_1)^{-1}, \quad q = x^{3+\mu}(b+q_1), \\ r = x^{1+\mu}(c+r_1),$$

где $a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$ – комплексные числа, а функции p_1, q_1, r_1 – комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{(\ln x)^{m-1}}{x} (|p_1| + |r_1| + |q_1|(1 + |p_1|)(1 + |q_1|)) \in L_1[1, +\infty). \quad (10)$$

Здесь m – наибольшее из чисел, равных $F(z, \mu) = a \left(\left(z + \frac{\mu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 \right) \left(\left(z + \frac{\mu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 \right) - b(\mu+3) \left(\left(z + \frac{\mu}{2} \right)^2 - \left(\frac{\mu+1}{2} \right)^2 \right) + c(\mu+1).$

Пусть z_1 – корень $F(z, \mu)$ кратности $l_1 \leq 4$. Тогда уравнение (1) имеет решения y_j ($j=1, 2, \dots, l_1$) вида

$$y_j^{[s-1]}(x) = x^{z_1-s+0.5} (\ln x)^{j-1} (c_s + o(1)) \quad , \quad s = 1, 2, \\ y_j^{[s-1]}(x) = x^{z_1+\mu-s+1.5} (\ln x)^{j-1} (c_{2+s} + o(1)) \quad , \quad s = 1, 2.$$

где c_s – некоторые комплексные числа и $c_1 \neq 0$.

Замечание. Отметим, что в работе [4, с. 219] изучен вопрос об асимптотике на бесконечности решений двучленных дифференциальных уравнений четного порядка с коэффициентами-распределениями вида

$$(-1)^n (p(x)y^{(n)})^{(n)} + q^{(k)}(x)y = \lambda y,$$

где $k \leq n$, а производные понимаются в смысле теории распределений.

В работе [5, с. 25] исследована асимптотика на бесконечности решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с коэффициентами-распределениями вида

$$i^{2n+1} ((q(x)y^{(n+1)})^{(n)} + (q(x)y^{(n)})^{(n+1)}) + q^{(k)}(x)y = \lambda y$$

где $k \leq n$, а производные понимаются в смысле теории распределений.

Список литературы:

- [1] Н. Н. Конечная, К.А. Мирзоев. Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами // Математические заметки. — 2016. — № 100, 1. — С. 312-317.
- [2] К. А. Мирзоев, А.А. Шкаликов Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Математические заметки. — 2016. — № 99, 5. — С. 788-793.
- [3] Eastham, M. S. P. The asymptotic solution of linear differential systems. — London Math. Soc. Monogr., 1989. — 241 p.
- [4] Н. Н. Конечная, К. А. Мирзоев, А.А. Шкаликов. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений // Математические заметки. — 2023. — №. 113, 2. — С. 217-235.
- [5] Н. Н. Конечная, К.А. Мирзоев. Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка // Вестник Московского университета. Серия I. Математика и механика. — 2020. — № 1. — С. 23-28.

Spisok literatury:

- [1] N. N. Konechnaia, K. A. Mirzoev Ob asimptotike reshenii odnogo klassa lineinykh differentsial'nykh uravnenii s negladkimi koeffitsientami // Matematicheskie zametki. — 2016. — № 100, 1. — S. 312-317.
- [2] K. A. Mirzoev, A.A. Shkalikov Differentsial'nye operatory chetnogo poriadka s koeffitsientami-raspredeleniiami // Matematicheskie zametki. — 2016. — № 99, 5. — S. 788-793.
- [3] Eastham, M. S. P. The asymptotic solution of linear differential systems. — London : London Math. Soc. Monogr., 1989. — 241 p.
- [4] N. N. Konechnaia, K. A. Mirzoev, A.A. Shkalikov Ob asimptotike reshenii dvuchlennykh differentsial'nykh uravnenii // Matematicheskie zametki. — 2023. — №. 113, 2. — S. 217-235.
- [5] N. N. Konechnaia, K. A. Mirzoev Ob asimptotike reshenii lineinykh differentsial'nykh uravnenii nechetnogo poriadka // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya I. Matematika i mekhanika. — 2020. — № 1. — S. 23-28.